SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

D. GUIDETTI

COMPORTAMENTO ASINTOTICO DELLE SOLUZIONI DI EQUAZIONI PARABOLICHE LINEARI

12 FEBBRAIO 1987

In questo seminario considereremo alcuni aspetti del comportamento asintotico delle soluzioni dell'equazione astratta

$$\frac{du}{dt} + A(t)u = f(t) \tag{1}$$

In particolare ci interesseremo al problema della convergenza per $t \to +\infty$ delle soluzioni di (1) ed (eventualmente) al loro sviluppo asintotico.

Cominceremo allora con qualche considerazione di carattere euristico.

Supponiamo che, in qualche senso, $A(t) \underset{t\to+\infty}{\to} A(\infty)$ e $f(t) \underset{t\to+\infty}{\to} f(\infty)$. Se $u(t) \underset{t\to+\infty}{\to} u(\infty)$, sarà ragionevole aspettarsi $\frac{du}{dt}(t) \underset{t\to+\infty}{\to} 0$. Dunque, formalmente $A(\infty)u(\infty) = f(\infty)$, da cui, se $A(\infty)$ è invertibile, $u(\infty) = A(\infty)^{-1} f(\infty)$. Da ciò, segue, in particolare, che, se $f = 0$, $u(\infty) = 0$ e questo presuppone uno stato di stabilità asintotica della soluzione nulla dell'equazione (1) con $f = 0$.

Consideriamo allora il problema della stabilità per equazioni del tipo (1).

Nel caso in cui la dimensione dello spazio è finita e $A(t) \equiv A$, questo tipo di stabilità si ha se $\sigma(A) \subseteq \{z \in C \mid \mathrm{Re}\, z > 0\}$.

Nel caso di un generico spazio di Banach complesso E, si ha stabilità asintotica se $-A$ è il generatore infinitesimale di un semigruppo analitico, $\exists \delta \geq 0$ tale che $\rho(A) \supseteq \{z \in C \mid \mathrm{Re}\, z \leq \delta\}$ e $\|(A-z)^{-1}\| \leq \frac{C}{1+|z|}$ (vedi [1] th. 4.3).

Nel caso in cui invece $A(t)$ non è costante la situazione è molto più complicata, anche nel caso finito-dimensionale.

Si consideri a proposito il seguente esempio (vedi [2]) poniamo $E = R^2$,

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 + 2\cos(4t) & -2-2\,\mathrm{sen}(4t) \\ 2 - 2\mathrm{sen}(4t) & 1-2\cos(4t) \end{pmatrix}$$

Si ha $\sigma(A(t)) = \{1\}\ \forall t \in R$, ma una soluzione di (1) con $f = 0$ è $t \to \begin{pmatrix} e^t \mathrm{sen}(2t) \\ e^t \cos(2t) \end{pmatrix}$

che non è neanche limitata su R^+.

Cominciamo allora a cercare di ricavare un risultato di stabilità asintotica per l'equazione astratta (1).

Le ipotesi generali con cui lavoriamo sono le seguenti: E è uno spazio di Banach complesso, $\forall t \geq 0$ A(t) è un operatore lineare chiuso a dominio denso in E (dominio in generale dipendente da t). Inoltre

(h_1) $\exists\delta\geq 0,\ \omega\in]0,\frac{\pi}{2}[$ tali che

$$\rho(A(t)) \supseteq S = \{z\in C \mid |Arg(z-\delta)|\geq\omega\} \quad \forall t\geq 0.$$

(h_2) $\exists c > 0$ tale che $\forall t\geq 0, \forall z\in S \quad \|(A(t)-z)^{-1}\|_{\mathscr{L}(E)} \leq \frac{c}{1+|z-\delta|}$

(h_3) L'applicazione $t \to (A(t)-z)^{-1}\in C^1(\overline{R^+};\mathscr{L}(E)) \quad \forall z\in S$

(h_4) $\left\|\frac{\partial(A(t)-z)^{-1}}{\partial t}\right\|_{\mathscr{L}(E)} \leq \frac{w(t)}{1+|z-\delta|}$ con $w\in L^\infty_{loc}(\overline{R^+})$

(h_5) $t \to \frac{dA(t)^{-1}}{dt}$ è localmente hölderiana da $\overline{R^+}$ a $\mathscr{L}(E)$.

Si sa (vedi [3]), che sotto queste condizioni gli operatori A(t) sono generatori infinitesimali di semigruppi analitici ed è possibile, con un procedimento dovuto a Kato e Tanabe, costruire un operatore di evoluzione $U(t,s)$ $(0\leq s\leq t<+\infty)$. Vale la seguente stima:

<u>Teorema 1.</u> Nelle ipotesi (h_1)-(h_5), $\exists C(\omega)>0$, $M \geq 1$ tali che:

$$\|U(t,s)\| \leq M \exp(C(\omega)\int_s^t w(\tau)d\tau - \delta(t-s)).$$

<u>Dim.</u> (Cenno). Cominciamo a considerare il caso $\delta=0$. Sostituiamo al problema (1) il problema approssimato (2)

$$(2) \qquad \frac{du}{dt} + A_n(t)u = 0$$

con $A_n(t) = nA(t)\ (n+A(t))^{-1}$.

Si verifica facilmente che gli operatori $A_n(t)$ verificano (h_1)-(h_5) e sono in più limitati. Se indichiamo con $U_n(t,s)$ l'operatore di evoluzione generato dagli $A_n(t)$ si può tentare di stimare $\|U_n(t,s)\|$ pensandolo come

$$\lim_{k\to+\infty} \exp(-\frac{(t-s)}{k} A(t-\frac{(t-s)}{k}))\ldots\ldots \exp(-\frac{(t-s)}{k} A(s+\frac{(t-s)}{k}))\ \exp(-\frac{(t-s)}{k} A(s))$$

Si tratta allora di stimare $\|\exp(-S_N A(t_N))\ldots\ldots\exp(-S_1\ A(t_1))\|_{(E)}$ con $0\le t_1\le \ldots \le t_N<+\infty$, $S_1,\ldots,S_N \ge 0$.

A tale scopo, osserviamo che $\|\exp(-sA_n(t))\|_{\mathscr{L}(E)} \le M$ con M indipendente da s, n, t.

Poniamo

$$\|x\|_{n,t} = \sup_{s\ge 0} \|\exp(-s\ A_n(t)x\|$$

$\|x\|_{n,t}$ è una norma su E e $\|x\| \le \|x\|_{n,t} \le M\|x\|$. Inoltre, $\|\exp(-s\ A_n(t))x\|_{n,t} \le$ $\le \|x\|_{n,t}\ \ \forall s\ge 0$.

Si può verificare che, nelle ipotesi fatte,

$$\|\exp(-s\ A_n(t+h)) - \exp(-s\ A_n(t))\| \le C(\omega)\int_t^{t+h} w(\tau)d\tau.$$

Da ciò,

$$\|\exp(-s\ A_n(t+h))\| \le \|\exp(-s\ A_n(t))\| + C(\omega)\int_t^{t+h} w(\tau)d\tau$$

che implica

$$\|x\|_{n,t+h} \le \|x\|_{n,t} + C(\omega)\int_t^{t+h} w(\tau)d\tau\|x\|_{n,t} \le \exp(C(\omega)\int_t^{t+h} w(\tau)d\tau)\|x\|_{n,t}.$$

Allora

$$\|\prod_{j=1}^{N}\exp(-s_j A_n(t_j)x\| \leq \|\prod_{j=1}^{N}\exp(-s_j A_n(t_j))x\|_{n,t_N} \leq$$

$$\leq \|\prod_{j=1}^{N-1}\exp(-s_j A_n(t_j))x\|_{n,t_N} \leq \exp(C(\omega)\int_{t_{N-1}}^{t_N} w(\tau)d\tau)$$

$$\|\prod_{j=1}^{N-1}\exp(-s_j A_n(t_j))x\|_{n,t_{N-1}} \leq \dots \leq$$

$$\leq \exp(C(\omega)\int_{t_1}^{t_N} w(\tau)d\tau)\| \exp(-s_1 A_n(t_1))x\|_{n,t_1} \leq$$

$$\leq \exp(C(\omega)\int_{t_1}^{t_N} w(\tau)d\tau)\ \|x\|_{n,t_1} \leq M\exp(C(\omega)\int_{t_1}^{t_N} w(\tau)d\tau)\|x\|$$

Da questa stima segue $\|U_n(t,s)\| \leq M \exp(C(\omega)\int_s^t w(\tau)d\tau)$. Si può provare che $U_n(t,s) \to U(t,s)$ in senso forte e ciò permette di estendere la disuguaglianza a $U(t,s)$.

Il risultato è dunque provato nel caso $\delta=0$. Se $\delta>0$, basta porre $\tilde{A}(t) = A(t)-\delta$. L'operatore di evoluzione associato ad $\tilde{A}(t)$ è $e^{\delta(t-s)}U(t,s)$. Da ciò il risultato generale.

Torniamo al problema della convergenza. Vale il seguente risultato, dovuto a H. Tanabe [4].

Supponiamo che:

(i) $D(A(t))$ è indipendente da t.

(ii) Valgono (h_1)-(h_2)

(iii) $\|(A(t)-A(s))A(0)^{-1}\| \leq \text{cost}(t-s)^{\alpha}$, $\alpha \in]0,1[$

(iv) $\exists A(\infty)$ con $D(A(\infty)) = D(A(t))$ e $\|(A(\infty)-A(t))A(0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \xrightarrow{t\to+\infty} 0$.

Consideriamo una soluzione debole (mild) di (1) con $f \in L^1_{loc}(\overline{R^+};E)$ (cioè $u(t) = U(t,s)\,x + \int_s^t U(t,\sigma)f(\sigma)d\sigma$ per $t \geq s$)

Se $f(\infty) \in E$ è tale che $\|f(t) - f(\infty)\| \xrightarrow{t\to+\infty} 0$, $\|u(t) - A(\infty)^{-1} f(\infty)\| \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.
Inoltre se f è hölderiana, u è una soluzione classica e $\frac{du}{dt} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

Supponiamo verificate (h_1)-(h_5) in maniera tale che $\|U(t,s)\| \leq$ $\leq \text{cost}\ e^{-\theta(t-s)}$ (con $\theta>0$).

Diamo la seguente definizione:

__Definizione 1.__ Sia $f[T,+\infty[\to E$ sommabile su ogni sottoinsieme di $[T,+\infty[$ di misura finita e sia $f(\infty) \in E$. Diremo che $f(t) \overset{g}{\to} f(\infty)$ se $\forall \varepsilon>0$ $L(\{t\geq T |\ \|f(t)-f_0\| \geq \varepsilon\} < +\infty$.

Si ha:

__Teorema 2.__ Siano soddisfatte (h_1)-(h_5) in modo che $\|U(t,s)\| \leq M\ e^{-\theta(t-s)}$ $(\theta>0)$. Sia $f: [T,+\infty[\to E$, $f(t) \overset{g}{\to} f(\infty)$. Supponiamo $A(t)^{-1} \to B_0$ in senso forte con $B_0 \in \mathscr{L}(E)$.

Allora ogni soluzione debole di (1) tende a $B_0 f(\infty)$ in norma al tendere di $t \to \infty$.

Se inoltre

(a) $\delta>0$, $w(t) \to 0$

(b) $\left\|\frac{dA(t)^{-1}}{dt} - \frac{dA(\tau)^{-1}}{d\tau}\right\| \leq C(t-\tau)^{\alpha}$ $\quad t, \tau \geq T$, $(\tau\leq t)$

(c) $\|f(t)-f(\tau)\| \leq C|t-\tau|^{\beta}$ $\quad (\beta \in]0,1[)$

ogni soluzione debole è classica e $\frac{du}{dt}(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

Osserviamo che il fatto che $\frac{du}{dt}(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ può essere utilizzato per provare la convergenza di $u(t)$ a $B_0 f(\infty)$ in una topologia più forte.

Infatti, supponiamo che F sia uno spazio di Banach, $F \hookrightarrow E$, $F \supseteq D(A(t))\ \forall t$, $A(t)^{-1} \in \mathscr{L}(E,F)$ e $A(t)^{-1} \to B_o$ in senso forte in $\mathscr{L}(E,F)$. Allora, da (1) segue

$$u(t) = A(t)^{-1} \left(f(t) - \frac{du}{dt}(t)\right)$$

e dalla convergenza di $\frac{du}{dt}(t) \to 0$ segue $\|u(t) - B_o f(\infty)\|_F \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Per descrivere meglio la soluzione per valori grandi di t, si può cercare di determinarne un eventuale sviluppo asintotico.

A tale proposito vale il seguente risultato dovuto a Pazy [5]: supponiamo che valgano le ipotesi del risultato di Tanabe e inoltre

$$\text{(v)} \qquad A(t) = A_o + \frac{1}{t} A_1 + \dots + \frac{1}{t^n} A_n + \frac{1}{t^{n+1}} R(t)$$

con $D(A(t)) = D(A_o) = \dots = D(A_n) = D(R(t))$ e $\|R(t)\, A(0)^{-1}\| \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

$$\text{(vi)} \qquad f(t) = f_o + \frac{1}{t} f_1 + \dots + \frac{1}{t^n} f_n + \frac{1}{t^n} \phi(t) \text{ con } \|\phi(t)\| \to 0.$$

Allora ogni soluzione debole u ammette lo sviluppo asintotico

$$u(t) = u_o + \frac{1}{t} u_1 + \dots + \frac{1}{t^n} u_n + \frac{1}{t^n} r(t)$$

con $r(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Questo risultato si può estendere al caso D(A(t)) variabile nel seguente modo:

<u>Teorema 3.</u> Supponiamo verificate le ipotesi (h_1)-(h_5) in modo tale che $\|U(t,s)\| \leq M\, e^{-\theta(t-s)}$ $(\theta>0)$.

Inoltre,

$$A(t)^{-1} = B_o + \frac{1}{t} B_1 + \dots + \frac{1}{t^n} B_n + \frac{1}{t^n} R(t)$$

con $B_o, \ldots, B_n, R(t) \in \mathcal{L}(E)$, $R(t) \to 0$ in senso forte, $\frac{dR(t)}{dt} x \underset{g}{\to} 0$ $\forall x \in E$.

Sia $f: \overline{R^+} \to E$, $f(t) = f_o + \frac{1}{t} f_1 + \ldots + \frac{1}{t^n} f_n + \frac{1}{t^n} r(t)$, con $r(t) \overset{g}{\to} 0$. Allora

$$u(t) = u_o + \ldots + \frac{1}{t^n} u_n + \frac{1}{t^n} \rho(t) \quad \text{con} \quad \|\rho(t)\| \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Vogliamo ora indicare alcune applicazioni dei risultati astratti precedenti.

Consideriamo il problema

$$(3) \qquad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + A(t,x,D)u = f(t,x) \;, \; t \geq 0 \;, \; x \in \Omega \\ B_j(t,x,D)u = 0 \quad \text{su } \partial\Omega \;, \; j = 1,\ldots,m. \\ u(0,x) = u_o(x) \;, \; x \in \Omega \end{cases}$$

con $D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$

Qui Ω è un aperto regolare di R^n, $A(t,x,D) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(t,x) D^\alpha$, le $a_\alpha \in C^\infty(\overline{R^+} \times \bar{\Omega})$, $\operatorname{Re} \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(t,x)\xi^\alpha \geq \nu |\xi|^{2m}$ $\forall t \geq 0$, $x \in \bar{\Omega}$, $\xi \in R^n$. Inoltre $a_\alpha(t,x) \overset{t \to +\infty}{\longrightarrow} a_\alpha(\infty,x)$ uniformemente su $\bar{\Omega}$, $\sup_t \|\frac{\partial a_\alpha}{\partial t}(t,\cdot)\|_{0,\infty} < +\infty$. Riguardo a

$B_j(t,x,D) = \sum_{|\beta| \leq m_j} b_{j,\beta}(t,x) D^\beta$, con $b_{j,\beta} \in C^\infty(\bar{R}^+ x \bar{\Omega})$, supponiamo che

$b_{j,\beta}(t,x) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} b_{j,\beta}(\infty,\cdot)$ in $C^{2m-m_j}(\bar{\Omega})$ e $\sup_t \|\frac{\partial b_{j,\beta}}{\partial t}(t,\cdot)\|_{0,\infty} < +\infty$

Supponiamo inoltre che $\forall t \geq 0$ il sistema $\{B_j(t,x,D)\}$ sia normale con $m_j \leq 2m-1$ j e sia verificata la seguente condizione (vedi Agmon [6]): poniamo $\overset{o}{A}(t,x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(t,x)\xi^\alpha$, $\overset{o}{B}_j(t,x,\xi) = \sum_{|\beta|=m_j} b_{j,\beta}(t,x)\xi^\beta$. Allora, $\exists \theta_o$

$\in]0,\pi/2[$ tale che $\forall t \geq 0$, $\lambda \in C$ con $|\text{Arg}\,\lambda| \geq \theta_0$, il polimonio in τ $\overset{\circ}{A}(t,x,\xi + \tau\nu(x)) - \lambda$ ha esattamente m radici $\tau_1(\xi,\lambda),\ldots,\tau_m(\xi,\lambda)$ con parte immaginaria positiva, $\forall \xi$ tangente in x a $\partial\Omega$, con ν normale esterna in x a $\partial\Omega$ e inoltre gli m polimoni in τ $\overset{\circ}{B}_j(t,x,\xi+\tau\nu(x))$ siano linearmente indipendenti modulo $\prod_{j=1}^{m}(\tau-\tau_j(\xi,\lambda))$. In tali ipotesi vale la seguente stima dovuta ad Agmon [6]: sia $\lambda \in C$ con $|\text{Arg}\,\lambda| \geq \theta_0$, $|\lambda| \geq C_0$ (con $C_0 > 0$ opportuno), $1<p<+\infty$. $\forall u \in W^{2m,p}(\Omega)$, $g_j \in W^{2m-m_j,p}(\Omega)$ coincidente con $B_j(t,x,D)u$ su $\partial\Omega$, si ha

$$\sum_{j=0}^{2m} |\lambda|^{\frac{2m-j}{2m}} \|u\|_{j,p} \leq C_0(\|(A(t,x,D)-\lambda)u\|_{o,p} + \tag{4}$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} |\lambda|^{\frac{2m-m_j}{2m}} \|g_j\|_{o,p} + \sum_{j=1}^{m} \|g_j\|_{2m-m_j,p})$$

Poniamo: $D(A(t)) = \{u \in W^{2m,p}(\Omega) \mid B_j(t,x,D)u=0 \text{ su } \partial\Omega,\ j=1,\ldots,m\}$, $A(t)u(x) = A(t,x,D)u$ $(0 \leq t \leq +\infty)$. Si può dimostrare che A(t) è il generatore infinitesimale di un semigruppo analitico in $L^p(\Omega)$.

(Si osservi che da (4) segue

$$|\lambda|\ \|u\|_{o,p} \leq C_0 \|A(t)u-\lambda u\|_{o,p} \quad \forall u \in D(A(t)))$$

e sono soddisfatte le ipotesi (h_1)-(h_5) almeno per t abbastanza grande, purché si supponga che $\rho(A(\infty)) \supseteq \{z \in C \mid \text{Re}z \leq 0\}$.

Verifichiamo soltanto (h_4):

Fissato $f \in L^p(\Omega)$ poniamo $u(t) = (A(t)-z)^{-1}f$, con $z \in \Sigma$,

$\dot{u}(t) = \frac{\partial (A(t)-z)^{-1}}{\partial t} f$, $\dot{A}(t,x,D) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{\partial a_\alpha}{\partial t}(t,x)D^\alpha$, $\dot{B}_j(t,x,D) = \sum_{|\beta| \leq mj} \frac{\partial b_{j,\beta}}{\partial t}(t,x)D^\beta$.

Vale

$$A(t,x,D)u(t) - zu(t) = f,$$

$$B_j(t,x,D)u(t) = 0 \quad \text{su } \partial\Omega$$

Derivando rispetto a t, si ottiene

$$A(t,x,D)\dot{u}(t) - z\dot{u}(t) = -\dot{A}(t,x,D)u(t)$$

$$B_j(t,x,D)\dot{u}(t) = -\dot{B}_j(t,x,D)\, u(t).$$

Da (4) segue allora

$$|z|\ \|\dot{u}(t)\|_{o,p} \leq C_o(\|\dot{A}\ (t,x,D)u(t)\|_{o,p} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} |z|^{\frac{2m-m_j}{2m}} \|\dot{B}_j(t,x,D)u(t)\|_{o,p} + \sum_{j=1}^{m} \|\dot{B}_j(t,x,D)u(t)\|_{2m-m_j,p})$$

$$\leq C_o(\sum_{|\alpha|\leq 2m} \|\frac{\partial a_\alpha}{\partial t}(t,\cdot)\|_{o,\infty} \|u(t)\|_{2m,p} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} |z|^{\frac{2m-m_j}{2m}} \sum_{|\beta|\leq m_j} \|\frac{\partial b_{j,\beta}(t,\cdot)}{\partial t}\|_{o,\infty} \|u(t)\|_{m_j,p} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\beta|\leq m_j} \|\frac{\partial b_{j,\beta}(t,\cdot)}{\partial t}\|_{o,\infty} \|u(t)\|_{2m,p}) \leq (\text{Applicando ancora (4)})\ c\|f\|_{o,p}.$$

Applichiamo ora i risultati astratti a (3); si ha:

<u>Lemma 4.</u> Supponiamo che $a_\alpha(t,x) = a_\alpha(\infty, x) + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{t^k} a_{\alpha,k}(x) +$

$+ \frac{1}{t^n} r_\alpha(t,x)$, con $\|r_\alpha(t,\cdot)\|_{0,\infty} + \|\frac{\partial r_\alpha}{\partial t}(t,\cdot)\|_{0,\infty} \xrightarrow{t\to+\infty} 0$, $b_{j,\beta}(t,x) =$

$= b_{j,\beta}(x) + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{t^k} b_{j,\beta,k}(x) + \frac{1}{t^n} \rho_{j,\beta}(t,x)$ con

$$\|\rho_{j,\beta}(t,\cdot)\|_{C^{2m-mj}(\bar\Omega)} \xrightarrow{t\to\infty} 0, \ \|\frac{\partial \rho_{j,\beta}}{\partial t}(t,\cdot)\|_{C^{2m-mj}(\bar\Omega)} \xrightarrow{t\to\infty} 0.$$

Allora, $A(t)^{-1} = A(\infty)^{-1} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{t^j} B_j + \frac{1}{t^n} R(t)$, con $\|R(t)\| + \|\frac{dR}{dt}(t)\|_{\mathscr{L}(E)} \xrightarrow{t\to+\infty} 0$.

Da ciò segue che

<u>Teorema 5.</u> Se sono soddisfatte le ipotesi del lemma 4 e $f: [0,+\infty[\times\Omega \to C$ è tale che:

(a) $f(t,\cdot) \in L^p(\Omega) \quad \forall t \geq 0$

(b) $t \to f(t,\cdot)$ è localmente hölderiana a valori in $L^p(\Omega)$

(c) $\|f(t,\cdot) - f(\infty)\|_{0,p} \xrightarrow{g} 0$

e se u è soluzione di (3),

$$\|u(t,\cdot) - A(\infty)^{-1} f(\infty)\|_{0,p} \xrightarrow{t\to\infty} 0$$

Se $\sum_{|\alpha|\leq m} \|\frac{\partial a_\alpha}{\partial t}(t,\cdot)\|_{0,\infty} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\beta|\leq m_j} \|\frac{\partial b_{j,\beta}}{\partial t}(t,\cdot)\|_{0,\infty} +$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\gamma|\leq m - m_j} \sum_{|\beta|\leq mj} \|\frac{\partial}{\partial t} D^\gamma b_{j,\beta}(t,\cdot)\|_{0,\infty} \xrightarrow{t\to\infty} 0,$$

$$\|u(t) - A(\infty)^{-1} f(\infty)\|_{2m,p} \xrightarrow{t\to\infty} 0 .$$

Se $f(t,x) = f_o(x) + \dots + \frac{1}{t^n} f_n(x) + \frac{1}{t^n} r(t,x)$, con $\|r(t,\cdot)\| \xrightarrow[t\to+\infty]{} o$,

$u(t,x) = \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{t^j} u_j(x) + \frac{1}{t^n} \rho(t,x)$, con $u_o,\dots,u_n \in$

$W^{2m,p}(\Omega)$, $\|\rho(t,\cdot)\|_{o,p} \xrightarrow{t\to\infty} 0$.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. PAZY, "Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations", Springer Verlag, 1983.

[2] R. CONTI, "Linear differential equations and control", Academic Press, 1976.

[3] H. TANABE, "Equations of evolution", Pitman, 1979.

[4] H. TANABE, Proc. Japan Acad., 37, 127-130, 1961.

[5] A. PAZY, Journ. Diff. Eq., 4, 493-509, 1968.

[6] S. AGMON, Comm . Pure and Appl. Math., 15, 119-147, 1962.